



## Matematika D+ kategória (11-12. osztályosok)

1. Egy  $n$  pozitív egész számot *reciprocizálhatónak* nevezünk, ha léteznek  $a_1, a_2, \dots, a_n$  különböző pozitív egész számok, amelyekre az

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

összeg értéke egész szám. Határozzuk meg az összes nem reciprocizálható pozitív egész számot.

2. Hat féltér metszete tartalmazza a  $P$  középpontú, egység sugarú gömböt.

Bizonyítsuk be, hogy a metszet tartalmaz a  $P$ -től  $\sqrt{2}$  távolságra levő pontot is.

*A félterek zártak, azaz tartalmazzák a határoló síkjuk pontjait is.*

3. Az  $ABCD$  konvex négyszög átlóinak metszéspontját jelölje  $M$ . Legyenek  $P$  és  $Q$  az  $AMD$  és  $BMC$  háromszögek súlypontjai, míg  $R$  és  $S$  az  $AMB$  és a  $CMD$  háromszögek magasságpontjai. Bizonyítsuk be, hogy a  $PQ$  és az  $RS$  egyenesek merőlegesek egymásra.

4. Az  $\{1, 2, \dots, 999\}$  halmaz egy olyan  $H$  részhalmazát szeretnénk kiválasztani, amely legalább 99 elemű és teljesül rá a következő feltétel: ha  $x, y \in H$  (itt  $x$  és  $y$  nem feltétlenül különböző elemek) és  $x + y < 1000$ , akkor  $x + y \in H$ .

Jelölje  $S$  a  $H$  elemeinek összegét. Mi  $S$  legkisebb lehetséges értéke?

5. Egy bolha ugrál a pozitív egész számokon. Első nap tetszőleges pozitív egészre ugorhat. Ezután minden nap átugrik egy olyan számra, amely legfeljebb kétszerese az előző napi állomáshelyének.

a) Mutassuk meg, hogy a bolha tud úgy ugrálni, hogy soha ne érkezzon olyan számra, amelynek a tízes számrendszerbeli jegyeinek összege megegyezik egy korábbi állomáshelyén vett jegyösszeggel.

b) Tud-e így ugrálni, ha a számok kettes számrendszerbeli alakjában vizsgáljuk a számjegyek összegét?

*Mindegyik megoldást külön lapra írjátok, amin szerepeljen a csapat neve, kategóriája, és a feladat száma. Mindegyik feladat 10 pontot ér. Feladatonként legfeljebb 3 extra pont is szerezhető lényegesen különböző második megoldással vagy általánosítással.*

*A feladatok megoldására 180 perc áll rendelkezésetekre. Jó versenyzést kívánunk!*