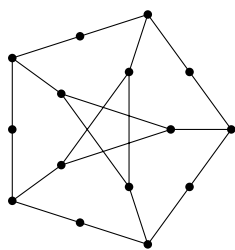




## Matematika C kategória (9-10. osztályosok)

1. Egy négyzetszám utolsó előtti számjegye 5. Mi lehet az utolsó számjegye?
2. Mutassuk meg, hogy egy háromszögben a leghosszabb oldalhoz tartozó magasság legfeljebb olyan hosszú, mint a leghosszabb oldal tetszőleges pontjából a két másik oldalra bocsájtott merőleges szakaszok hosszának összege.
3. Legyen  $a_1 = 1$  és minden pozitív egész  $n$ -re  $a_{n+1} = a_n + \lfloor \sqrt{a_n} \rfloor$ . Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok négyzetszám van ebben a sorozatban. ( $\lfloor x \rfloor$  jelöli az  $x$  szám alsó egészrészét, azaz a legnagyobb egész számot, ami nem nagyobb  $x$ -nél.)
4. Egy  $100 \times 100$ -as négyzetrács minden mezőjének közepén áll egy fa. Ebből a 10000 fából legfeljebb hány fát lehet kivágni úgy, hogy egyik fatuskóra állva se lássunk másik fatuskót?  
*A fákat és a tuskókat pontszerűnek tekintjük. Egy fatuskóra állva akkor látszik egy másik, ha a két tuskót összekötő szakaszon nem áll kivágatlan fa.*
5. Van 60 üveg borunk, de egy közülük mérgezett. Aki a mérgezett borba beleiszik, 12 órán belül meghal. Van három kóstolónk, a borokat csak ők kóstolhatják meg. Mutassunk olyan stratégiát, amellyel 36 óra alatt biztosan el lehet dönteni, hogy a 60 üveg borból melyik a mérgezett!  
*A teljes pontszám megszerzéséhez a stratégia helyességét is bizonyítani kell. Részpontszám jár olyan stratégiákért, amelyek kevesebb üveg bor esetén meg tudják találni 36 óra alatt a mérgezettet.*

**Játék** Az ábrán látható gráfon egy tolvaj menekül néhány rendőr elől. Először a rendőrök foglalják el a pozíciójukat, majd a tolvaj választ kiinduló pontot. Egy körben előbb a rendőrök, majd a tolvaj lép egy-egy él mentén. Minden körben kötelező mindenkinek helyet változtatnia, és rendőrök állhatnak ugyanazon a mezőn.



A rendőrök nyernek, ha a tolvaj bármikor egy csúcson van egy rendőrrel. A tolvaj nyer, ha tud háromszor lépni anélkül, hogy a rendőrök elkapnák. A rendőrök számát a szervezők határozzák meg a játék elején. *Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthetitek el a rendőrök számának ismeretében, hogy a tolvaj vagy a rendőrök bőrébe szeretnétek bújni!*

*Mindegyik megoldást külön lapra írájátok, amin szerepeljen a csapat neve, kategóriája, és a feladat száma. Mindegyik feladat 12 pontot ér. Feladatonként legfeljebb 4 extra pont is szerezhető lényegesen különböző második megoldással vagy általánosítással.*

*A feladatok megoldására 180 perc áll rendelkezésetekre. Jó versenyzést kívánunk!*