

Matematika C+ kategória (9-10. osztályosok)

1. Mutassuk meg, hogy egy háromszögben a leghosszabb oldalhoz tartozó magasság legfeljebb olyan hosszú, mint a leghosszabb oldal tetszőleges pontjából a két másik oldalra bocsájtott merőleges szakaszok hosszának összege.

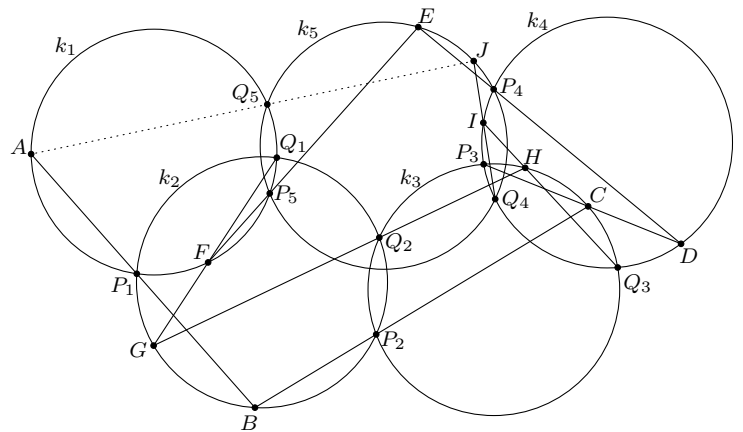
2. Legyen $a_1 = 1$ és minden pozitív egész n -re $a_{n+1} = a_n + \lfloor \sqrt{a_n} \rfloor$. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok 2-hatvány van ebben a sorozatban. ($\lfloor x \rfloor$ jelöli az x szám alsó egészrészét, azaz a legnagyobb egész számot, ami nem nagyobb x -nél.)

3. Bizonyítsuk be, hogy minden d számnak van olyan n többszöröse, hogy n valamelyik nemnulla számjegyét törölve továbbra is d -vel osztható számot kapunk.

Például ha $d = 2016$, akkor $n = 4479552$ jó, mert $2016 \mid 4479552$ és a 9-es törlése után $2016 \mid 447552$.

4. Adottak a síkon a k_1, k_2, k_3, k_4 és k_5 körök.

A k_i és k_{i+1} körök két metszéspontja P_i és Q_i ($1 \leq i \leq 5, k_6 = k_1$). A k_1 kör egy tetszőleges pontja A . Ezután úgy vesszük fel a $B, C, D, E, F, G, H, I, J, K$ pontokat rendre a $k_2, k_3, k_4, k_5, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_1$ körökön, hogy $AP_1B, BP_2C, CP_3D, DP_4E, EP_5F, FQ_1G, GQ_2H, HQ_3I, IQ_4J, JQ_5K$ egy egyenesre eső ponthármassok legyenek. Bizonyítsuk be, hogy $K = A$.

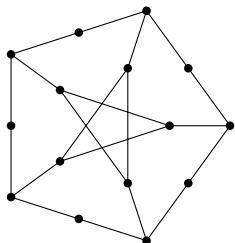


A körök különböző sugarúak is lehetnek, és az ábrától különböző módon is elhelyezkedhetnek. Feltesszük, hogy a szerkesztés során semelyik két fent említett pont sem esik egybe.

5. Van 60 üveg borunk, de egy közülük mérgezett. Aki a mérgezett borba beleiszik, 12 órán belül meghal. Van három kóstolónk, a borokat csak ők kóstolhatják meg. Mutassunk olyan stratégiát, amellyel 36 óra alatt biztosan el lehet dönteni, hogy a 60 üveg borból melyik a mérgezett!

A teljes pontszám megszerzéséhez a stratégia helyességét is bizonyítani kell. Részpontszám jár olyan stratégiáért, amelyek kevesebb üveg bor esetén meg tudják találni 36 óra alatt a mérgezettet.

Játék Az ábrán látható gráfon egy tolvaj menekül néhány rendőr elől. Először a rendőrök foglalják el a pozíciójukat, majd a tolvaj választ kiinduló pontot. Egy körben előbb a rendőrök, majd a tolvaj lép egy-egy él mentén. Minden körben kötelező mindenkinek helyet változtatnia, és rendőrök állhatnak ugyanazon a mezőn.



A rendőrök nyernek, ha a tolvaj bármikor egy csúcson van egy rendőrrel. A tolvaj nyer, ha tud háromszor lépni anélkül, hogy a rendőrök elkapnák. A rendőrök számát a szervezők határozzák meg a játék elején. *Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthettek el a rendőrök számának ismeretében, hogy a tolvaj vagy a rendőrök bőrébe szeretnétek bújni!*

Mindegyik megoldást külön lapra írájatok, amin szerepeljen a csapat neve, kategóriája, és a feladat száma. Mindegyik feladat 12 pontot ér. Feladatonként legfeljebb 4 extra pont is szerzhető lényegesen különböző második megoldással vagy általánosítással.

A feladatok megoldására 180 perc áll rendelkezésetekre. Jó versenyzést kívánunk!