Matematika D kategória (11-12. osztályosok)

1. Adjuk meg a következő egyenlet összes valós megoldását:

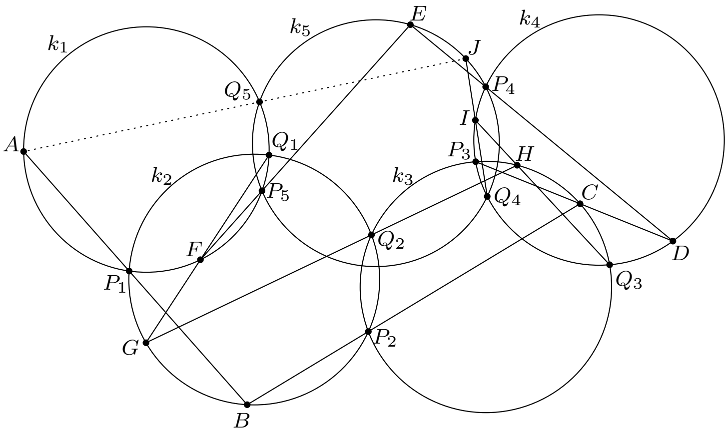
$$(x+1)^2-(x+2)^2+(x+3)^2-\cdots+(x+2015)^2-(x+2016)^2=0.$$

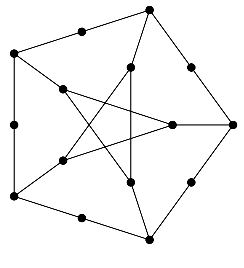
2. Két játékos, A és B kap tőlünk egy-egy kártyát, és annyit elárulunk nekik, hogy mindkét kártyán egy egyjegyű pozitív egész szám áll, méghozzá úgy, hogy a két szám különbsége 1 vagy 8. Mindketten csak a saját kártyájukat látják. A kártyák kézbekapása után A felemeli vagy a bal, vagy a jobb kezét. Ezután B-nek tippelnie kell arra, hogy A kezében milyen kártya van. Ki tudja-e B találni biztosan, hogy A-nál milyen kártya van, ha a kártyák kézbekapása előtt megbeszélhetnek egy stratégiát?

3. Egy 100×100-as négyzetrács minden mezőjének közepén áll egy fa. Ebből a 10000 fából legfeljebb hány fát lehet kivágni úgy, hogy egyik fatuskóra állva se lássunk másik fatuskót?
A fákat és a tuskókat pontszerűnek tekintjük. Egy fatuskóra állva akkor látszik egy másik, ha a két tuskót összekötő szakaszon nem áll kivágatlan fa.

4. Bizonyítsuk be, hogy minden d pozitív egész számnak van olyan n többszöröse, hogy n valamelyik nemnulla számjegyét törölve továbbra is d-vel osztható számot kapunk.
Például, ha $d=2016$, *akkor* $n=4479552$ *jó, mert* $2016 \mid 4479552$ *és a 9-es törlése után* $2016 \mid 447552$.

5. Adottak a síkon a k_1, k_2, k_3, k_4 és k_5 körök. A k_i és k_{i+1} körök két metszéspontja P_i és Q_i ($1\le i\le 5$, $k_6=k_1$). A k_1 kör egy tetszőleges pontja A. Ezután úgy vesszük fel a B, C, D, E, F, G, H, I, J, K pontokat rendre a k_2, k_3, k_4, k_5, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_1 körökön, hogy AP_1B, BP_2C, CP_3D, DP_4E, EP_5F, FQ_1G, GQ_2H, HQ_3I, IQ_4J, JQ_5K egy egyenesre eső ponthármasok legyenek. Bizonyítsuk be, hogy $K=A$.
A körök különböző sugarúak is lehetnek, és az ábrától különböző módon is elhelyezkedhetnek. Feltesszük, hogy a szerkesztés során semelyik két fent említett pont sem esik egybe.





Játék Az ábrán látható gráfon egy tolvaj menekül néhány rendőr elől. Először a rendőrök foglalják el a pozíciójukat, majd a tolvaj választ kiinduló pontot. Egy körben előbb a rendőrök, majd a tolvaj lép egy-egy él mentén. Minden körben kötelező mindenkinek helyet változtatnia, és rendőrök állhatnak ugyanazon a mezőn.
A rendőrök nyernek, ha a tolvaj bármikor egy csúcson van egy rendőrrel. A tolvaj nyer, ha tud háromszor lépni anélkül, hogy a rendőrök elkapnák. A rendőrök számát a szervezők határozzák meg a játék elején.

Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthetitek el a rendőrök számának ismeretében, hogy a tolvaj vagy a rendőrök bőrébe szeretnétek bújni!

Mindegyik megoldást külön lapra írjátok, amin szerepeljen a csapat neve, kategóriája, és a feladat száma. Mindegyik feladat 12 pontot ér. Feladatonként legfeljebb 4 extra pont is szerezhető lényegesen különböző második megoldással vagy általánosítással. A feladatok megoldására 180 perc áll rendelkezésetekre. Jó versenyzést kívánnak:

a IX. Dürer Verseny szervezői