

Matematika D+ kategória (11-12. osztályosok)

1. Két játékos, A és B kap tőlünk egy-egy kártyát, és annyit elárulunk nekik, hogy mindkét kártyán egy egyjegyű pozitív egész szám áll, méghozzá úgy, hogy a két szám különbsége 1 vagy 8. Mindketten csak a saját kártyájukat látják. A kártyák kézbekapása után A felemeli vagy a bal, vagy a jobb kezét. Ezután B -nek tippelnie kell arra, hogy A kezében milyen kártya van. Ki tudja-e B találni biztosan, hogy A -nál milyen kártya van, ha a kártyák kézbekapása előtt megbeszélhetnek egy stratégiát?

2. Bizonyítsuk be, hogy minden d pozitív egész számnak van olyan n többszöröse, hogy n valamelyik nemnulla számjegyét törölve továbbra is d -vel osztható számot kapunk.

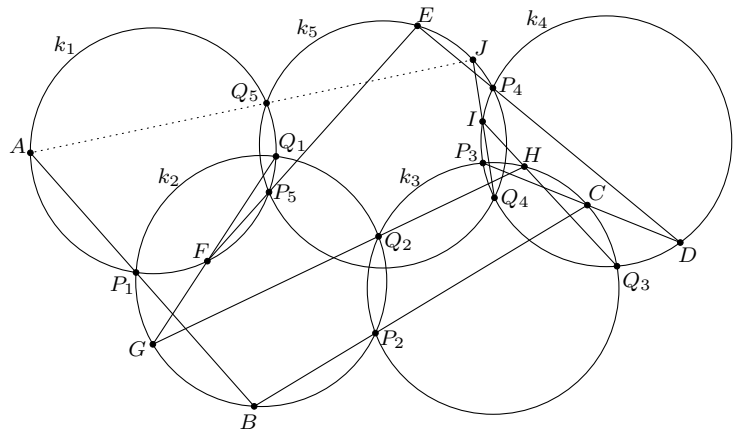
Például, ha $d = 2016$, akkor $n = 4479552$ jó, mert $2016 \mid 4479552$ és a 9-es törlése után $2016 \mid 447552$.

3. Adott egy $0 < x < 1$ irracionális szám tizedestört alakban. Albrecht kiválasztja az első néhány (de véges sok) tizedesjegyet. Ezeket tetszőlegesen permutálja. Ezután a következő néhány jegyével csinálja ugyanezt; és így tovább, amíg az összes jegyét nem permutálta. Igaz-e, hogy minden x -re elérheti, hogy a folyamat végén egy racionális számot kapjon?

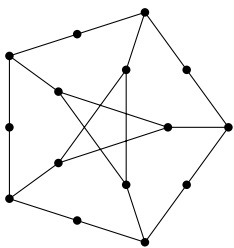
4. Adottak a síkon a k_1, k_2, k_3, k_4 és k_5 körök.

A k_i és k_{i+1} körök két metszéspontja P_i és Q_i ($1 \leq i \leq 5, k_6 = k_1$). A k_1 kör egy tetszőleges pontja A . Ezután úgy vesszük fel a $B, C, D, E, F, G, H, I, J, K$ pontokat rendre a $k_2, k_3, k_4, k_5, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_1$ körökön, hogy $AP_1B, BP_2C, CP_3D, DP_4E, EP_5F, FQ_1G, GQ_2H, HQ_3I, IQ_4J, JQ_5K$ egy egyenesre eső ponthármassok legyenek. Bizonyítsuk be, hogy $K = A$.

A körök különböző sugarúak is lehetnek, és az ábrától különböző módon is elhelyezkedhetnek. Feltesszük, hogy a szerkesztés során semelyik két fent említett pont sem esik egybe.



5. Lehet-e 9 embernek páros tollaslabda bajnokságot szervezni a következő feltételek szerint: tetszőleges A, B játékospár pontosan egyszer legyen együtt és pontosan kétszer egymás ellen?



Játék Az ábrán látható gráfon egy tolvaj menekül néhány rendőr elől. Először a rendőrök foglalják el a pozíciójukat, majd a tolvaj választ kiinduló pontot. Egy körben előbb a rendőrök, majd a tolvaj lép egy-egy él mentén. Minden körben kötelező mindenkinek helyet változtatnia, és rendőrök állhatnak ugyanazon a mezőn.

A rendőrök nyernek, ha a tolvaj bármikor egy csúcson van egy rendőrrel. A tolvaj nyer, ha tud háromszor lépni anélkül, hogy a rendőrök elkapták. A rendőrök számát a szervezők határozzák meg a játék elején.

Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthetitek el a rendőrök számának ismeretében, hogy a tolvaj vagy a rendőrök bőrébe szeretnétek bújni!

Mindegyik megoldást külön lapra írójatok, amin szerepeljen a csapat neve, kategóriája, és a feladat száma. Mindegyik feladat 12 pontot ér. Feladatonként legfeljebb 4 extra pont is szerzhető lényegesen különböző második megoldással vagy általánosítással. A feladatok megoldására 180 perc áll rendelkezésetekre. Jó versenyzést kívánunk!