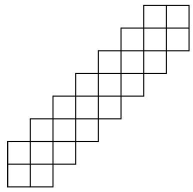
Váltóverseny, C és C+ kategória

IX. Dürer Döntő, 2015. február 6.

A C kategória versenyzői az 1-16., a C + kategória versenyzői pedig az 5-20. feladatokat kaphatták meg. A C+ kategória számára minden feladat az ideírtnál eggyel kevesebb pontot ért.

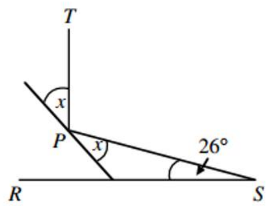
C1 Ha három macska három liter tejet három perc alatt iszik meg, akkor kilenc macska kilenc liter tejet hány perc alatt iszik meg? (3 pont)

C2 Hányféleképpen lehet feljutni az alábbi ábra bal alsó mezőjéből a jobb felsőbe, ha közben csak jobbra vagy felfelé lehet lépni? (3 pont)

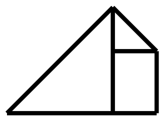


C3 Egy kör kerületére felírjuk egytől százig a számokat valamilyen sorrendben, majd összeadjuk a szomszédos tagok különbségeinek abszolútértékeit. Mi a legkisebb szám, amit kaphatunk? (3 pont)

C4 Az RS fal mentén, az S pontban álló focista elrúg egy labdát, ami a P pontban találja el a másik falat, ahonnan elpattan a T pont felé úgy, hogy az ábrán jelölt két x szög megegyezik, ráadásul az RS egyenes merőleges a TP egyenesre. Mekkora az x értéke, ha a focista 26°-os szögben rúgta el a labdát az RS falhoz képest? (3 pont)



C5 Egy A/4-es papír rövidebb oldala 210 mm, oldalainak aránya pedig $\sqrt{2}$. Az ábrán látható módon behajtjuk a papír két sarkát. Hány mm a kapott négyszög kerülete? (4 pont)



C6 Jelöljük H-val azt, hogy legfeljebb hány huszárt lehet úgy elhelyezni egy sakktáblán, hogy egyik huszár se üsse a másikat. Hasonlóan, jelöljük K-val azt, hogy legfeljebb hány királyt lehet úgy elhelyezni, hogy egyik király se üsse a másikat. Mennyi $H - K$? (4 pont)

C7 Legfeljebb hány oldalú lehet egy olyan konvex sokszög, amelynek nincs két szomszédos tompaszöge? (4 pont)

C8 A Budapest és Miskolc közötti vasútvonalon két szakaszon is sebességkorlátozást vezettek be, így az utat 80 km/h átlagsebességgel teszi meg a Dürer Verseny díjait szállító tehervonat. Ha a kettő közül bármelyik szakaszon feloldanák a korlátozást, az átlagsebesség 96 km/h lenne. Hány km/h lenne az átlagsebesség, ha egyszerre mindkét szakaszon feloldanák a korlátozást? (4 pont)

C9 Hány olyan összeg létezik, amit pontosan 8-féleképpen lehet kifizetni jelenleg forgalomban lévő magyar pénzérmékkel (5, 10, 20, 50, 100, 200 Ft)? (5 pont)

C10 Legfeljebb hány részre osztja a síkot 3 konvex négyszög? (5 pont)

C11 Egy egész számokat tartalmazó halmaz *lyukacsos*, ha bármely három szomszédos egész szám közül legfeljebb egyet tartalmaz. Hány lyukacsos részhalmaza van az $\{1, 2, 3, \ldots, 12\}$ halmaznak? (5 pont)

C12 Melyik a legnagyobb háromjegyű szám, amelyre igaz a következő: osztja azt a számot, amit úgy kapunk, hogy minden prímtényezőjét megnöveljük eggyel, majd ezeket a számokat összeszorozzuk?
Például a 12 ilyen tulajdonságú kétjegyű szám, mivel $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \mid (2 + 1)(2 + 1)(3 + 1) = 36$.
(5 pont)

C13 Egy kockát tükröztünk valamilyen sorrendben minden lapjára pontosan egyszer. A hat tükrözés végrehajtása után hányféle helyre kerülhet a dobókocka? (6 pont)

C14 Egy négyzet alapú gúlának minden éle 1 cm hosszú. Két szemközti háromszög lapjára egy-egy 1 cm élhosszúságú szabályos tetraédert ragasztunk úgy, hogy az összeragasztott lapok teljesen fedjék egymást. Hány lapja van az így kapott testnek? (6 pont)

C15 Albert és Berta az alábbi játékot játsszák. Albert egy $9,5$ m sugarú kör közepén áll. Egy lépésben kiválaszt egy irányt, Berta pedig eldöntheti, hogy abba az irányba vagy az ellenkezőbe menjen-e Albert 1 métert. Albert legkevesebb hány lépésben tudja biztosan elérni vagy átlépni a körvonalat? (6 pont)

C16 Hány olyan pozitív egészekből álló (a, b) számpár van, amire a és b relatív prím és az $\frac{a}{b} + \frac{14b}{9a}$ kifejezés értéke egész? (6 pont)

C17 A Maracanã Stadion egyik szektorában a székek táblázatszerűen 81 sorban és 99 oszlopban vannak elrendezve. Az ide szóló jegyek kódjának utolsó 4 számjegyét a jegyre is ráírták. A bal felső sarokba szóló jegyre 0000-t írtak. Minden további jegy kódjára igaz, hogy az a legkisebb nemnegatív szám van ráírva, amelyik a sorában tőle balra és az oszlopában felette lévő székekhez tartozó jegyek egyikén se szerepel. Milyen szám szerepel a jobb alsó sarokba szóló jegyen?
(7 pont)

C18 Az idei olimpiára Abszurdisztán végtelen sok sportolóval érkezik. Egy riporter végigkérdezi őket, hogy mi a kedvenc nemnegatív egész számuk, erre sorban az alábbiakat válaszolják: $a_1, a_2, \ldots$. A riporter észreveszi, hogy $a_{n+2} = |a_{n+1} - a_n|$ teljesül minden $n \geq 1$ esetén. Így úgy érezte, hogy nem kell sok mindent feljegyeznie. A papírjára csak annyit írt fel, hogy $a_1 = 999, a_2 < 999$ és $a_{2016} = 1$. Ezek alapján hányféle különböző értéket vehet fel a_2? (7 pont)

C19 Az $ABCD$ trapézban az AB és CD oldalak párhuzamosak egymással, valamint $AB = 11$, $BC = 5$, $CD = 19$ és $DA = 7$. Az A-ból és a D-ből induló belső szögfelezők a P pontban, a B-ből és a C-ből induló belső szögfelezők a Q pontban metszik egymást. Hányszorosa lesz $\sqrt{3}$-nak az $ABQCDP$ hatszög területe? (7 pont)

C20 Az $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ betűk mind különböző számjegyeket jelölnek 1-től 9-ig. Tudjuk, hogy teljesül az $\overline{ABC} + \overline{DEF} = \overline{GHI}$ egyenlőség, továbbá a $\overline{DBA} + \overline{GHI} = \overline{CFE}$ egyenlőség. (Az összeadások tizes számrendszerben értendőek.) Mennyi $\overline{HAB}$ értéke? (7 pont)

Megoldókulcs

C1	3
C2	128
C3	198
C4	32

C5	840
C6	16
C7	6
C8	120

C9	0
C10	26
C11	129
C12	864

C13	8
C14	5
C15	91
C16	4

C17	50
C18	324
C19	30
C20	543