Váltóverseny, D és D+ kategória

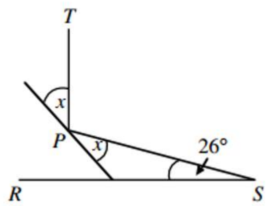
IX. Dürer Döntő, 2015. február 6.

A D kategória versenyzői az 1-16., a D+ kategória versenyzői pedig az 5-20. feladatokat kaphatták meg. A D+ kategória számára minden feladat az ideírtnál eggyel kevesebb pontot ért.

D1 Ha három macska három liter tejet három perc alatt iszik meg, akkor kilenc macska kilenc liter tejet hány perc alatt iszik meg? (3 pont)

D2 A $\{3, 6, 9, 10\}$ halmazhoz hozzáadtunk egy ötödik n számot úgy, hogy az ne egyezzen meg egyik korábbival sem, valamint az öt szám átlaga legyen egyenlő az öt szám mediánjával. Mennyi az n lehetséges értékeinek összege? (3 pont)

D3 Az RS fal mentén, az S pontban álló focista elrúg egy labdát, ami a P pontban találja el a másik falat, ahonnan elpattan a T pont felé úgy, hogy az ábrán jelölt két x szög megegyezik, ráadásul az RS egyenes merőleges a TP egyenesre. Mekkora az x értéke, ha a focista 26°-os szögben rúgta el a labdát az RS falhoz képest? (3 pont)

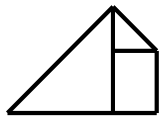


D4 Egy f függvényről azt tudjuk, hogy minden $x \neq 0$ valós szám esetén

$$2f\left(\frac{1}{x}\right) + 3f(x) = 9x.$$

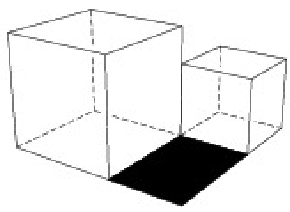
Határozzuk meg $f(3)$ értékét. (3 pont)

D5 Egy A/4-es papír rövidebb oldala 210 mm, oldalainak aránya pedig $\sqrt{2}$. Az ábrán látható módon behajtjuk a papír két sarkát. Hány mm a kapott négyszög kerülete? (4 pont)



D6 Jelöljük H-val azt, hogy legfeljebb hány huszárt lehet úgy elhelyezni egy sakktáblán, hogy egyik huszár se üsse a másikat. Hasonlóan, jelöljük K-val azt, hogy legfeljebb hány királyt lehet úgy elhelyezni, hogy egyik király se üsse a másikat. Mennyi $H - K$? (4 pont)

D7 Az ábrán látható két kockát egy vízszintes asztalon helyeztük el. A két kocka élhosszának összege 8 cm, a kockák térfogatösszege pedig 272 cm^3. Hány cm^2 a fekete téglalap területe? (4 pont)



D8 A Budapest és Miskolc közötti vasútvonalon két szakaszon is sebességkorlátozást vezettek be, így az utat 80 km/h átlagsebességgel teszi meg a Dürer Verseny díjait szállító tehervonat. Ha a kettő közül bármelyik szakaszon feloldanák a korlátozást, az átlagsebesség 96 km/h lenne. Hány km/h lenne az átlagsebesség, ha egyszerre mindkét szakaszon feloldanák a korlátozást? (4 pont)

D9 Albrecht az Olimpián elment a Velodromba megnézni egy kerékpáros versenyszámot. A körbe-körbebicikliző 10 versenyzőről az alábbi probléma jutott az eszébe. Felveszünk egy körvonalon 10 pontot, majd mindet összekötjük mindegyik másikkal. Legfeljebb hány metszéspontja van a keletkező húroknak a kör belsejében? (5 pont)

D10 Melyik a legnagyobb háromjegyű szám, amelyre igaz a következő: osztja azt a számot, amit úgy kapunk, hogy minden prímtényezőjét megnöveljük eggyel, majd ezeket a számokat összeszorozzuk?
Például a 12 ilyen tulajdonságú kétjegyű szám, mivel $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \mid (2+1)(2+1)(3+1) = 36$. (5 pont)

D11 Határozzuk meg a legnagyobb n természetes számot, amely rendelkezik a következő tulajdonsággal: *Ha az* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *számokra teljesül az* $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$ *összefüggés, akkor az* $x_1^n + x_2^n + \ldots + x_n^n = n \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$ *összefüggés is teljesül.* (5 pont)

D12 Egy egész számokat tartalmazó halmaz *lyukacsos*, ha bármely három szomszédos egész szám közül legfeljebb egyet tartalmaz. Hány lyukacsos részhalmaza van az $\{1, 2, 3, \ldots, 12\}$ halmaznak? (5 pont)

D13 Egy kockát tükröztünk valamilyen sorrendben minden lapjára pontosan egyszer. A hat tükrözés végrehajtása után hányféle helyre kerülhet a dobókocka? (6 pont)

D14 Egy négyzet alapú gúlának minden éle 1 cm hosszú. Két szemközti háromszög lapjára egy-egy 1 cm élhosszúságú szabályos tetraédert ragasztunk úgy, hogy az összeragasztott lapok teljesen fedjék egymást. Hány lapja van az így kapott testnek? (6 pont)

D15 Albert és Berta az alábbi játékot játsszák. Albert egy $9,5$ méter sugarú kör közepén áll. Egy lépésben kiválaszt egy irányt, Berta pedig eldöntheti, hogy abba az irányba, vagy az ellenkezőbe menjen Albert 1 métert. Albert legkevesebb hány lépésben tud biztosan kijutni? (6 pont)

D16 A Maracanã Stadion egyik szektorában a székek táblázatszerűen 81 sorban és 99 oszlopban vannak elrendezve. Az ide szóló jegyek kódjának utolsó 4 számjegyét a jegyre is ráírták. A bal felső sarokba szóló jegyre 0000-t írtak. Minden további jegy kódjára igaz, hogy az a legkisebb nemnegatív szám van ráírva, amelyik a sorában tőle balra és az oszlopában felette lévő székekhez tartozó jegyek egyikén se szerepel. Milyen szám szerepel a jobb alsó sarokba szóló jegyen? (6 pont)

D17 Az idei olimpiára Abszurdisztán végtelen sok sportolóval érkezik. Egy riporter végigkérdezi őket, hogy mi a kedvenc nemnegatív egész számuk, erre sorban az alábbiakat válaszolják: $a_1, a_2, \ldots$. A riporter észreveszi, hogy $a_{n+2} = |a_{n+1} - a_n|$ teljesül minden $n \geq 1$ esetén. Így úgy érezte, hogy nem kell sok mindent feljegyeznie. A papírjára csak annyit írt fel, hogy $a_1 = 999, a_2 < 999$ és $a_{2016} = 1$. Ezek alapján hányféle különböző értéket vehet fel a_2? (7 pont)

D18 Az $ABCD$ trapézban az AB és CD oldalak párhuzamosak egymással, valamint $AB = 11$, $BC = 5$, $CD = 19$ és $DA = 7$. Az A-ból és a D-ből induló belső szögfelezők a P pontban, a B-ből és a C-ből induló belső szögfelezők a Q pontban metszik egymást. Hányszorosa lesz $\sqrt{3}$-nak az $ABQCDP$ hatszög területe? (7 pont)

D19 Az $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ betűk mind különböző számjegyeket jelölnek 1-től 9-ig. Tudjuk, hogy teljesül az $\overline{ABC} + \overline{DEF} = \overline{GHI}$ egyenlőség, továbbá a $\overline{DBA} + \overline{GHI} = \overline{CFE}$ egyenlőség. (Az összeadások tizes számrendszerben értendőek.) Mennyi $\overline{HAB}$ értéke? (7 pont)

D20 Határozzuk meg a legkisebb kerületű olyan egész oldalú háromszög kerületét, amelynek az egyik szöge ötször akkora, mint egy másik. (7 pont)

Megoldókulcs

D1	3	D5	840	D9	210	D13	8	D17	324
D2	26	D6	16	D10	864	D14	5	D18	30
D3	32	D7	10	D11	3	D15	91	D19	543
D4	15	D8	120	D12	129	D16	50	D20	2475