Fizika F kategória (11-12. osztályosok)

Döntő, elméleti forduló 2015. 2. 6.

1. feladat

A klasszikus, newtoni fizikát Einstein a XX. században két esetben is korrigálta. Ezek közül a későbbi, az általános relativitás elmélete azt írja le, hogy milyen hatással van a gravitáció jelenléte a térre és az időre. Ilyenkor két dolog történik: egyrészt nagy gravitációs potenciálban görbül a tér, ahogy azt mondani szokták, másrészt lassul az idő. Mi most ez utóbbival fogunk foglalkozni. Felmerül a kérdés, hogy mégis mekkora ez az effektus, talákozunk-e ilyennel a való életben?

Ha a fénysebességhez képest kis sebességekkel közlekedünk és a gravitációs potenciál is gyenge a fénysebesség négyzetéhez képest, akkor az idő lelassulátát a következő közelítő képlettel számíthatjuk ki. Legyen t az az idő, amit akkor mérnénk, ha nem lenne semmilyen gravitációs potenciál a környezetünkben. Ekkor τ, a ϕ gravitációs potenciálban mért idő a következő lesz:

$$\tau = \sqrt{1 + \frac{2\phi}{c^2}}t. \tag{1}$$

(a) Ha George Clooney-nak 91 percbe telik visszanézni az alakítását a Gravitáció című filmben, miközben a Temzén lévő magánszigetén bourbont kortyolgat a gömbszerű Földön, akkor a Földről nézve Sandra Bullocknak a London - New York repülőjáraton 10000 méter magasan mennyi idejébe telik ugyanez? Feltételezzük, hogy mindketten ugyanazt vágást nézik és nem tekernek bele az unalmas részeknél.

(b) A film után George Clooney vitorlázni megy, de hogy ne vesszen el, GPS-szel követi a helyzetét a térképén. A GPS műholdakkal való helymeghatározás azon alapszik, hogy a földi vevőkészülék a GPS műholdaktól kapott pontos időt összehasonlítja a saját pontos idejével, amiből kiszámolja a műholdak távolságát és a műholdak ismert helyzetéből kiszámolja a saját helyzetét. A földi órához képest mekkora eltérés adódik a műhold órájában 24 óra alatt, ha a GPS műholdak 20000 kilométer magasan keringenek? A GPS műhold a saját helyzetét és műhold órájának pontos idejét fénysebességgel küldi el a földi vevőegységnek. Hány métert tévedne a GPS műhold távolságában a földi vevőegység, ha nem vennénk figyelembe, hogy a műholdnak a gravitációs hatások miatt másképp telik az idő?

(Gondoljuk meg, hogy az (a) és (b) feladatokban mikor milyen képletet használhatunk a gravitációs potenciálra!)

2. feladat

Egy R sugarú hengerben lévő ϱ sűrűségű ideális folyadékot a henger tengelye körül ω szögsebességgel forgatunk. Milyen alakú lesz a folyadék felszíne? (Legyen középen a magasság $h(0) = 0$! Ekkor $h(r) = ?$ ahol $0 \leq r \leq R$).

3. feladat

Kepler a gravitációs erő ismerete nélkül, a kísérleti adatokra támaszkodva írta fel a bolygók mozgását leíró három törvényét:

I A bolygók pályája ellipszis, amelynek egyik gyújtópontjában a Nap áll.

II A bolygót a Nappal összekötő egyenes azonos időközök alatt azonos nagyságú területeket súrol

III A keringési idő négyzete arányos az ellipszis főtengelyének köbével

Ebben a feladatban megmutatjuk, hogy ezekből a törvényekből levezethető a gravitációs erő Newton óta ismert alakja, miszerint a két test (esetünkben a bolygó és a Nap) között ható erő nagysága a közöttük lévő távolság négyzetével fordítottan arányos.

(a) Tekintsük azt a speciális esetet, amikor a bolygó pályája kör alakú. Hogyan változik ekkor a bolygó sebességvektorának hossza és iránya az időben? Mely Kepler törvény/törvények alapján állíthatjuk ezt? Fejezzük ki a mozgás periódusidejét a körmozgás sebességével és gyorsulásával! Vezessük le ebből, hogy hogyan függ a bolygó gyorsulása a sebességtől és a pálya sugarától! (Az eredmény ismerős lesz.)

(b) Felhasználva az előző részfeladat eredményét és Newton II. törvényét, mutassuk meg, hogy a Nap és a bolygó között ható erő a távolságuk négyzetének reciprokával arányos!

4. feladat

Folyadék felszínén lebegő porszemcsék érdekes, látszólag véletlenszerű, össze-vissza "ugráló" mozgást végeznek. Ezt a jelenséget, amelyet Brown-mozgásnak nevezünk, a folyadék molekuláival való ütközés okozza.

A Brown-mozgást könnyen leírhatjuk egy egyszerű modellel. Tekintsünk egy olyan részecskét, amely 1 dimenzióban, egy egyenes mentén mozog. Az origóból indulva, τ időközönként véletlenszerűen hol balra, hol jobbra ugrik a távolságot. A jobbra és a balra ugrás valószínűsége egyaránt 1/2.

A mozgás leírásához vezessük be az e_i változót, amelynek értéke $+1$ ha az i. lépésben jobbra ugrottunk, és -1 ha az i. lépésben balra ugrottunk. Ekkor N lépés után a teljes elmozdulás $x = e_1 + e_2 + e_3 + \ldots + e_N$ (kezdetben a helykoordináta $x = 0$).

Mivel az ugrálás véletlenszerűen történik, nem tudjuk megmondani, hogy pontosan hova fog érkezni a részecskénk. Azt azonban meg tudjuk jósolni, hogy adott idő alatt várhatóan milyen messzire jut el az origótól. Egy változó várható értékét úgy értjük, hogy a lehetséges értékeket megszorozzuk a hozzájuk tartozó valószínűségekkel és ezeket összegezzük.

(a) Mennyi az e_i változó várható értéke?

(b) Mekkora lesz a helykoordináta várható értéke? (Használjuk az előző feladat eredményét!)

(c) Számítsuk ki a helykoordináta négyzetének várható értékét N lépés után! (Jó tanács: használjuk itt is az e_i változókat!). Hogyan függ ez az eltelt időtől? (N lépés után az eltelt idő $t = N\tau$.)

(d) Mi történne, ha a részecske nem csak jobbra-balra hanem fel és le is ugorhatna, mindegyik irányba 1/4 valószínűséggel? Hogyan függene ekkor az origótól mért távolság négyzetének várható értéke az időtől? (Nem kell sokat számolni, nyugodtan használjuk ki az előző feladat eredményét).

5. feladat

Vizsgáljunk egy $2\,L$ hosszú, egyenletesen töltött, elhanyagolható vastagságú szigetelő rudat. A rúd egységnyi hosszra eső töltését jelölje η. A kérdés, amire a választ keressük az, hogy a rúd közepétől, a rúdra merőleges irányban r távolságra eltávolodva mekkora elektromos térerősséget mérhetünk. Ezt általában integrálszámítással szokás meghatározni, most azonban mutatunk rá egy egyszerűbb módszert.

A $2L$ hosszú rúd által létrehozott potenciált a vizsgált pontban jelölje $\Phi_{2L}(r)$, az elektromos térerősséget pedig $E_{2L}(r)$!

(a) Első lépésként dimenzióanalízis segítségével lássuk be, hogy a potenciál a távolságtól csak az $\frac{r}{L}$ arányon keresztül függhet!

(b) Vágjunk le a rúdból mindkét oldalon egy kis δL hosszú darabot. Ekkor az eredeti $2L$ hosszú rúd három darabra esik szét: egy $2L - 2\delta L$ hosszú rúdra és két kicsi (pontszerűnek tekinthető) δL hosszú darabra. Írjuk fel $\Phi_{2L}(r)$-et a három darabból származó potenciálok összegeként!

(c) A dimenzióanalízis eredményét kihasználva vizsgájuk meg, hogy mi történne ha az $2L - 2\delta L$ hosszt visszaskáláznánk az eredeti $2L$ értékre. Hogyan változik meg ekkor az r távolság? A kapott eredményt kihasználva végül írjuk fel $E_{2L}(r)$ értékét!

(d) Vizsgáljuk meg az $L \to \infty$ határesetet! Hogyan lehetne ennek eredményét más módszerrel megkapni?