Fizika F kategória (11-12. osztályosok)

Mérési forduló 2016. 2. 6.

A π mérése

Jegyzőkönyv készítés

A jegyzőkönyv készítésnél ügyeljetek a jegyzőkönyv áttekinthetőségére! A jegyzőkönyv tartalmazzon minden - az alábbi mérési leírást meghaladó - információt, ami alapján a mérésetek megismételhető! Minden mennyiség mérését többször végezzétek el! Minden mérési eredményt rögzítsetek táblázatban! Próbáljatok azonosítani a mérés lehetséges hibaforrásait, esetleg megbecsülni az ezekből származó hibák nagyságát!

Monte Carlo-módszer

A Monte Carlo-módszer a véletlen mintavételezésen alapuló számítógépes szimulációk egy széles csoportja. Leggyakrabban terület-, térfogatszámítási vagy optimalizációs feladatokra használjuk. Ebben a mérési fordulóban ennek a módszernek egy "kézzel" is megvalósítható változatát területszámítási feladatokra fogjuk alkalmazni.
Képzeljük el, hogy egy felületen van egy ismert T_A területű alakzatunk (A), és egy másik alakzat (B), melynek T_B területét nem ismerjük és feladatunk ezt meghatározni. Vegyünk fel a felületen véletlenszerűen, de egyenletesen pontokat! Számoljuk meg, hogy hány pont esik az A illetve a B alakzatba (N_A és N_B)! Ekkor a B alakzat területére a legjobb becslésünk:

$$T_B \approx \frac{N_B}{N_A} T_A. \tag{1}$$

Ez alapján egy egység sugarú körbe nagyjából π-szer annyi véletlen pontnak kell esnie, mint egy egység oldalú négyzetbe.

π meghatározása terület méréssel

A fent leírt gondolatkísérlet alapján lehetőségünk nyílik a π értékének mérésére: ha adott egy ismert T_A területű téglalap és egy r sugarú kör, és ezekre az egyenletesen elszórt véletlen pontok közül N_A és N_B darab esik, akkor a fenti képletet használva:

$$r^2\pi \approx \frac{N_B}{N_A} T_A \tag{2}$$

$$\pi \approx \frac{N_B}{N_A} \cdot \frac{T_A}{r^2} \tag{3}$$

1. feladat

Mérjétek meg vonalzóval a lap oldalait és a lapra rajzolt kör sugarát! A lapot egyenletesen szórjátok meg a méréshez kiadott apró szemű anyaggal, majd számoljátok meg, hány szem esett a lapra és ezek közül hány a kör területére. A mért adatokból számoljátok ki az általatok mért π értéket! A mérést legalább 3-szor, de lehetőleg minél többször végezzétek el! Adjátok meg a mért π értékek átlagát és szórását is!

π mérése szakaszok és egyenesek metszéspontjaiból

A π értékét más módszerrel is megmérhetjük: vegyünk egy „egyenletesen vonalazott” síkot, ahol a szomszédos párhuzamos egyenesek egymástól d távolságra vannak. Szórjunk erre a síkra véletlen szerűen N db l hosszúságú szakaszt ($l < d$)! Legyen N_m azon szakaszok száma, melyek metszik valamelyik egyenest! Ekkor az N_m/N hányadosból következtethetünk π értékére. Hogy pontosan hogyan, az a 2. feladat része.

2. feladat

Ahhoz, hogy egy szakasz messe valamely egyenest, az szükséges, hogy a szakasz legyen „közel” az egyeneshez, és „álljon jó irányba”. A továbbiakban jelöljük x-szel a szakasz középpontjának távolságát a legközelebbi egyenestől ($-d/2 \leq x < d/2$) és α-val az egyenesekkel bezárt szögét! A szakasz akkor metszi az egyenest, ha a[1]

$$\sin(\alpha) \cdot l/2 \geq x \tag{4}$$

egyenlőtlenség teljesül. Átrendezve:

$$\sin(\alpha) \geq 2 \cdot x/l. \tag{5}$$

Vegyünk fel egy koordináta rendszert, melynek vízszintes tengelyén az α szöget, függőleges tengelyén a $2x/l$ mennyiséget ábrázoljuk!

1. Ebben a koordináta-rendszerben hol vannak azok a pontok, amelyek olyan elrendezéseknek felelnek meg, amelyekben a szakasz metszi az egyenest? (Ne feledjük el, hogy x értéke $-d/2$ és $+d/2$ közé esik!)

2. Mérjétek meg a kiadott gyufaszálak hosszát, és a bevonalazott lapon az egymást követő egyenesek távolságát! Szórjatok N db gyufát egyenletesen a lapra, és számoljátok meg, hogy közülük hány darab metszi az egyenest (N_m)! Lehetőség szerint minél nagyobb N-et válasszatok és a mérést legalább háromszor, de lehetőleg minél többször ismételjétek meg!

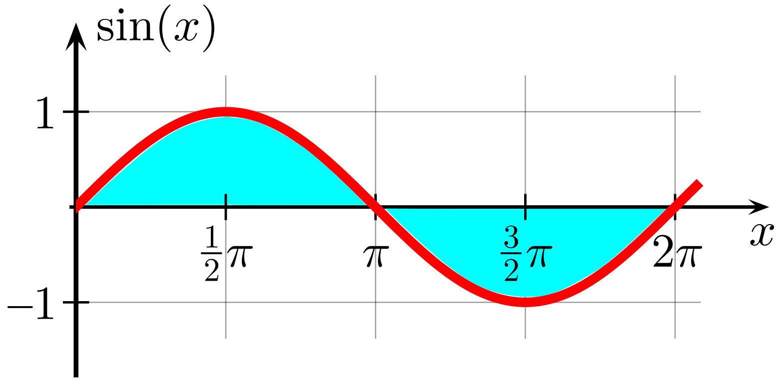
3. Az előző két részfeladat eredményeit felhasználva adjátok meg, hogy ezzel a módszerrel mennyinek mértétek a π értékét? (Átlagot és szórást is adjatok meg!)

[1] A versenyen kiadott mérésleírásban a relációs jelek hibásan ($\leq$) szerepeltek.

Emlékeztetők

A $\sin(x)$

A $\sin(x)$ függvény $0 \leq x \leq 2\pi$ szakaszának és az x tengely ($y = 0$) által közrezárt terület nagysága: 2. (Lásd az 1. ábrát.)



1. ábra. A $\sin(x)$ függvény és az x tengely által bezárt terület nagysága 2.

Az átlag és a szórás

Ha a mérési eredmények a_1, a_2, $a_3 \ldots a_n$, akkor:

- az átlag: $\langle a \rangle = \frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n}$
- a szórás: $\Delta a = \sqrt{\langle a^2 \rangle - \langle a \rangle^2}$, ahol $\langle a^2 \rangle = \frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots+a_n^2}{n}$. A szórás másként is kiszámolható (ugyanazt az eredményt kapjuk): $\Delta a = \sqrt{\frac{(a_1-\langle a \rangle)^2+(a_2-\langle a \rangle)^2+(a_3-\langle a \rangle)^2+\ldots+(a_n-\langle a \rangle)^2}{n}}$.

Használható segédeszközök: író- és rajzolóeszközök, számológép, függvénytáblázat.
A mérési fordulóra 120 perc áll a csapatok rendelkezésére.
Sikeres versenyzést kívánnak:

a szervezők